

4-MAVZU. QATTIQ JISMNING AYLANMA XARAKAT DINAMIKASI

1. Qattiq jismning aylanma harakati
2. Kuch momenti. Inersiya momenti
3. Aylanish oqiga nisbatan impuls momenti
4. Impuls momentining ozgarish va saqlanish qonuni

1. Qattiq jismning aylanma harakati

Shu vaqtgacha moddiy nuqta deb hisoblanishi mumkin bo'lgan jismning harakati qarab chiqildi. Endi n ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan tizimni (jismlar tizimini) qarab chiqaylik.

Kuchlar ta'sirida tizimdagi har bir moddiy nuqta o'z harakatini o'zgartiradi. Binobarin, tizimning harakatini tekshirish uchun tizimdagi har bir moddiy nuqta uchun tuzilgan harakat tenglamalari tizimini yechish kerak.

Bunday masalani yechib, moddiy nuqtalar tizimi harakatini butunligicha tekshirib, hal qilish mumkin. Buning uchun moddiy nuqtalar tizimini tavsiflovchi yangi tushunchalar kiritamiz:

1. Moddiy nuqtalar tizimining massasi m_c ni tizimdagi moddiy nuqtalar massalarining algebraik yig'indisiga teng, deb hisoblaymiz:.

$$m_c = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i \quad (4.1)$$

2. Moddiy nuqtalar tizimining massa markazini – inersiya markazi deb hisoblab, mazkur nuqtaning vaziyatini koordinata boshiga nisbatan quyidagi radius - vektor bilan ifodalash mumkin

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m_c} \quad (4.2)$$

Tizim inersiya markazi radius - vektorining Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalari quyidagilarga teng bo'ladi:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m_c} ; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m_c} ; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m_c} . \quad (4.3)$$

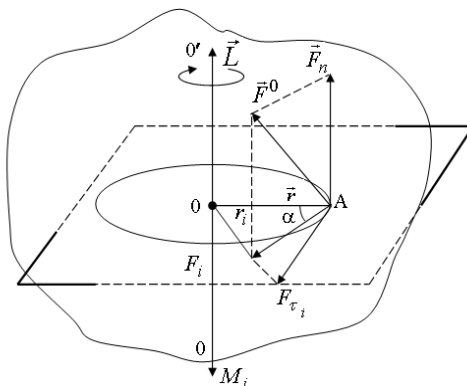
Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, tizimning inersiya markazi uning og'irlik markazi bilan ustma-ust tushishi kerak

2. Kuch va inersiya momenti

Qattiq jism aylanma harakat dinamikasining asosiy kattaliklari – impuls momenti va kuch momenti tushunchalari bir-biri bilan

chambarchas bog‘liqdir. Kuch momenti nuqtaga nisbatan bo‘lsa, impuls momenti o‘qqa nisbatandir. Shuning uchun ularni bir-biri bilan almashtirish mumkin emas. Har qanday vektorning biror nuqtaga nisbatan momenti vektor kattalik bo‘lgani uchun, kuch momenti ham vektor kattalikdir. Impuls momenti esa, o‘q uzunligiga nisbatan bo‘lgani uchun vektor kattalik emas.

Endi qattiq jismning biror 0 nuqtasiga nisbatan kuch vektori \vec{F} ning yoki impuls vektori \vec{P} ning momentini qarab chiqaylik(1-rasm). Bu nuqta *bosh nuqta yoki qutb* deb ataladi.



1 - rasm. 00' aylanish o‘qiga o‘rnatilgan qattiq jismga ixtiyoriy tashqi kuch ta’siri

Massa markazidan o‘tgan 00' o‘qqa mahkamlangan jismning, shu o‘qdan r masofaga joylashgan qandaydir A nuqtasiga istalgan yo‘nalishda \vec{F}^0 kuch qo‘yamiz. \vec{F}^0 – kuch vektori bilan ustma-ust tushgan chiziqqa *kuchning ta’sir chizig‘i* deb ataladi.

Aylanish o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan tekislikda yotuvchi kuchning \vec{F}_i tashkil etuvchisi jismning aylanishiga sabab bo‘lishi mumkin.

\vec{F}_n – tashkil etuvchisi esa, 00' o‘q bo‘ylab ilgari lanma harakatni vujudga keltiradi.

Kuchning $\vec{F}_{\tau i}$ – tangensial tashkil etuvchisi ta’sirida, m_i massali A nuqta \vec{r} radiusli aylanani chizishi mumkin. \vec{F}_i kuchning aylantirish effekti 00' o‘q bilan kuchning ta’sir chizig‘i orasidagi masofa katta bo‘lishi bilan orta boradi.

Radius – vektor \vec{r}_i ning \vec{F}_i kuchga vektor ko‘paytmasi kuchning ixtiyoriy qo‘zg‘almas 00’ o‘qqa nisbatan *kuch momenti* deb ataladi

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i] \quad (4.4)$$

Kuch momentining moduli quyidagiga teng

$$|\vec{M}_i| = [[\vec{r}_i \cdot \vec{P}]] = M_i = F_i \cdot r \sin \alpha \quad (4.5)$$

Massasi m ga teng bo‘lgan moddiy nuqta \vec{v} tezlik bilan harakatlanayotganda \vec{P} impulsiga ega bo‘ladi. \vec{r} – radius - vektorning \vec{P} impulsiga vektor ko‘paytmasi *impuls momenti* deb ataladi. \vec{L} – impuls momentining vektori yo‘nalishi parma qoidasi asosida aniqlanadi.

\vec{r} – radius-vektor va \vec{P} – impuls vektori yotgan tekislikka perpendikulyar ravishda 0 nuqtaga joylashtirilgan parma dastasining aylanma harakat yo‘nalishi impuls yo‘nalishi bilan mos tushganda, parmaning ilgariylanma harakat yo‘nalishi impuls momenti \vec{L} ning yo‘nalishini ko‘rsatadi:

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{P}] = [\vec{r}(m \cdot \vec{v})] = m[\vec{r} \cdot \vec{v}] \quad (4.6)$$

Impuls momentining moduli quyidagiga tengdir:

$$|\vec{L}| = [\vec{r} \cdot \vec{P}] = r \cdot P \sin \alpha \quad (4.7)$$

Moddiy nuqta impuls momenti o‘zgarish qonunini impuls momentining vaqt bo‘yicha hosilasi orqali topamiz

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot \vec{P}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{P} \right] + \left[\vec{r} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} \right] \quad (4.8)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{v} \cdot \vec{P}] + [\vec{r} \cdot \vec{F}] \quad (4.9)$$

\vec{v} va \vec{P} vektorlar parallel, kolleniar vektorlarning ko‘paytmasi bo‘lgani uchun $[\vec{v} \cdot \vec{P}] = 0$ ga teng bo‘ladi, u holda

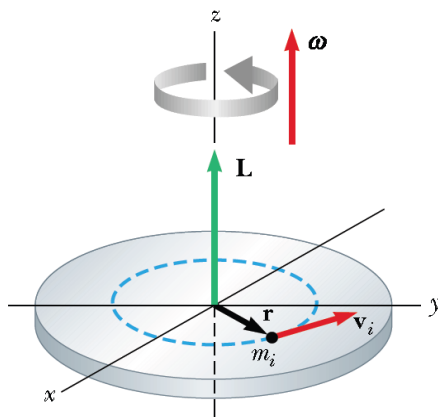
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r} \cdot \vec{F}] = \vec{M}_c \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_c \quad (4.10)$$

Moddiy nuqta impulsining biror nuqtaga nisbatan o‘zgarishi, shu moddiy nuqtaga ta’sir qiluvchi kuch momentiga tengdir. Agar $\vec{M} = 0$ bo‘lsa, impuls momentining saqlanish qonunini ifodasiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad \vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{P}] = [\vec{r} \cdot m \cdot \vec{v}] = const \quad (4.11)$$

Ixtiyoriy o‘q atrofida aylanma harakat qilayotgan moddiy nuqtaga tashqi kuch momenti ta’sir etmasa, u o‘zining impuls momentini miqdor va yo‘nalishi jihatdan o‘zgarimas holda saqlaydi.

Shu vaqtgacha aylana bo‘ylab harakat tenglamalarini chiziqli tezlik orqali ifoda qilgan edik. Endi shu ifodalarni burchak tezlik va burchakli tezlanish orqali ifodalaymiz: $\frac{d\omega}{dt} = \beta$



2-rasm. Moddiy nuqta impulsining z o‘qqa nisbatan impuls momenti

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{P}] = [\vec{r} \cdot m \cdot \vec{v}] = m[\vec{r} \cdot \vec{v}] \quad (4.12)$$

Chiziqli tezlik burchak tezlik bilan quyidagicha bog‘langan $\vec{v} = \omega \vec{r}$, u holda,

$$L_z = m[\vec{r} \cdot \omega \vec{r}] = mr^2 \cdot \omega \quad (4.13)$$

\vec{L}_z – moddiy nuqta impulsining z o‘qqa nisbatan impuls momentidir.

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m \cdot \vec{v}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{i}(p_y z - p_z y) + \vec{j}(p_x z - p_z x) +$$

$$+\vec{k}(p_y x - p_x y).$$

Moddiy nuqta impulsining z aylanish o‘qiga nisbatan *inersiya momenti* uning massasining aylanish radiusi kvadrati ko‘paytmasiga teng bo‘lgan fizikaviy kattalikdir:

$$I_z = \frac{\vec{L}_z}{\omega} = m\vec{r}^2 \quad (4.14)$$

3. Aylanish oqiga nisbatan impuls momenti

Qattiq jismning Z aylanish o‘qiga nisbatan impuls momenti - \vec{L}_z shu o‘qqa nisbatan inersiya momenti I_z ning burchak tezlikka ko‘paytmasiga tengdir $L_z = I_z \cdot \omega$

4. Impuls momentining ozgarish va saqlanish qonuni. Endi impuls momentining o'zgarishini aniqlaymiz

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \frac{d(I_z \vec{\omega})}{dt} = \vec{M}_z \quad (4.15)$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \cdot \vec{\beta} = \vec{M}_z \quad (4.16)$$

Shunday qilib, qattiq jismning Z aylanish o'qiga nisbatan inersiya momentining burchak tezlanishga ko'paytmasi, tashqi kuchning shu o'qqa nisbatan natijaviy kuch momentiga teng bo'ladi. (4.16) ifoda qattiq jism aylanma harakati dinamikasining asosiy tenglamasidir u $\vec{F} = m\vec{a}$ tenglamaga o'xshash bo'lgani uchun ba'zan uni *qattiq jism aylanma harakati uchun Nyutonning ikkinchi qonuni* deb ataladi.

Agar aylanish o'qiga ega bo'lgan jismga tashqi kuchlar ta'sir qilmasa $\vec{M}_z = 0$, $d\vec{L}_z = \vec{M}_z dt = 0$ yoki $d\vec{L}_z = d(I_z \cdot \vec{\omega}) = \vec{M}_z dt = 0$

$$L_z = I_z \vec{\omega} = \text{const.} \quad (4.17)$$

Bu ifoda *impuls momentining saqlanish qonunidir*.

Aylanish o'qiga ega bo'lgan qattiq jismga tashqi kuchlar ta'sir etmasa yoki ularning aylanish o'qiga nisbatan kuch momenti nolga teng bo'lsa, qattiq jismning aylanish o'qiga nisbatan impuls momenti miqdor va yo'nalishi jihatidan o'zgarmay qoladi.

Shteyner teoremasi. Agar massa markazidan o'tgan o'qqa nisbatan I_C inersiya momenti ma'lum bo'lsa, massa markazidan d masofadan o'tgan istalgan O parallel o'qqa nisbatan inersiya momentini hisoblash juda oson. Rasmdan ko'rinib turibdiki, qattiq jismning ixtiyoriy m_i zarrasining ikkala o'qqa nisbatan masofasi mos ravishda r_i va $r_i + d$ ga teng.

$$I_0 = \sum_i m_i (r_i + d)^2 = \sum_i m_i (r_i^2 + 2r_i d + d^2) = \sum_i m_i r_i^2 + 2 \sum_i m_i r_i d + \sum_i m_i d^2$$

(4.32)

ifodadagi ikkinchi qo'shiluvchi $d = \text{const}$ ekanligidan

$$2 \sum_i m_i r_i d = 2d \underbrace{\sum_i m_i r_i}_0 = 0 \quad (4.18)$$

Natijada impuls momenti quyidagidan iborat boladi

$$I_0 = \sum_i m_i r_i^2 + 2 \underbrace{\sum_i m_i r_i d}_0 + \sum_i m_i d^2 = I_C + md^2 \quad (4.19)$$

Nazorat test savollari

1. Moddiy nuqta $R=1m$ radiusli aylana boylab harakatlanmoqda. U A nuqtadan B nuqtaga otganda aylananing $1/3$ ($\alpha=2\pi/3$) qismini otgan bolsa, uning otgan yolini aniqlang.

A $1m$ B $\sqrt{3}/2 m$ C $2m$ D* $2\pi/3m$

2. Aylanma harakat qilayotgan jismning aylanish burchagi $f=6t^3-8t$ tenglama bilan berilgan. Burchak tesligi qaysi ifoda bilan aniqlanadi?

A $18t^2+8$ B $18t^2$ C* $18t^2-8$ D $18t+8$

3. Noma'lum uchar jism Z oqi atrofida aylanmoqda. Burilish burchagining vaqtga bogliqligi $\varphi(t) = At - Bt^2/2$ ifoda bilan berilgan. Bunda A va B musbat sonlar. Qanday vaqtda aylanishlar tohtaydi?

A A/B B* $2A/B$ C $2B/A$ D $B/2A$

4. 6 kg massali 2 m radiusli diskning inersiya momenti qanday qiymatda boladi?

A* 24 B 12 C 48 D 36

5. Jismning aylanish oqiga eng yaqin bolgan 0,5 m usoqlikdagi nuqtasiga tasir qilayotgan 20N kuchning momenti hisoblansin.

A* 10 B 5 C 20 D 30

6. 6 kg massali 3m radiusli diskning inersiya momenti qanday qiymatga ega boladi?

A 18 B* 54 C 15 D 36

7. Shar gorizont tekislik bo'ylab dumalamoqda. Ifodalarning qaysi biri sharning to'liq kinetik energiyasiga tegishli?

A $W_k = \frac{m g^2}{2}$ B $W_k = \frac{J \omega^2}{2}$ C* $W_k = \frac{m g^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2}$ D $W_k = \frac{kx^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2}$

8. Quyidagi vektor fizikaviy kattaliklardan qaysi biri yo'nalish bo'yicha doim klassik mexanikadagi kuch vektori yo'nalishiga mos keladi.

A Tezlanish B Tezlik C Radius vektor D* Impuls

9 Ikkita bir xil massali moddiy nuqtalar $R_1 = 2R_2$ radiusli aylanalar bo'ylab bir xil burchak tezlik bilan harakatlanmoqdalar. Bunda nuqtalar impuls momentlarining nisbati L_1/L_2 nimaga teng.

A 2 B 4 C 1 D* $1/2$

10 Moddiy nuqta aylana radiusi bo‘ylab tekis aylanmoqda. Bir marta aylanishdagi markazga intilma kuchning bajargan ishini toping.

A $M\varphi$ B $\frac{J\omega^2}{2}$ C $\frac{m g^2}{R} - 2\pi R$ D* $m\omega^2 R s$

Foydalanish mumkin bo‘lgan adabiyotlar

1 Frish S.E, Timoreva A.B. Umumiy Fizika kursi. tom 1. Oqituvchi nashriyoti.1965.

2. Савельев И. В. Курс физики. М.: Лань, 2011, т. 1.Механика

3 Abdurahmahov K.P., Hamidov V.S., Ahmedova N.A. Fizika. Aloqachi. 2018

4 WWW.fizika.uz.